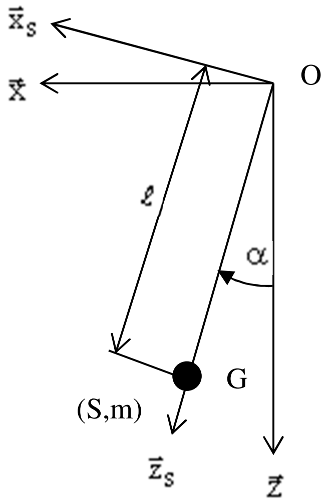
Corrigé Pendule Pesant



a) Matrice de changement de base

Le solide tourne autour de $(O, \vec{y}) \Rightarrow \vec{y} = \vec{y}_S$

En projetant $\vec{x}_S$ sur $\vec{x}$ et $\vec{z}$ on a :

$$\vec{x}_S = \cos\alpha\,\vec{x} - \sin\alpha\,\vec{z}$$

En projetant $\vec{z}_S$ sur $\vec{x}$ et $\vec{z}$ on a :

$$\vec{z}_S = \sin\alpha\,\vec{x} + \cos\alpha\,\vec{z}$$

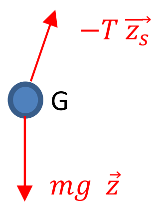
	x	y	z
x_S	$\cos\alpha$	0	$-\sin\alpha$
y_S	0	1	0
z_S	$\sin\alpha$	0	$\cos\alpha$

$\overrightarrow{OG} = l\,\overrightarrow{z_S}$

b) Torseur des efforts extérieurs en G:

En isolant le point matériel G, on est en

présence de 2 forces, la tension T du fil
et le poids



$${}_G\{\bar{S} \rightarrow S\} = {}_G\{Pes \rightarrow S\} + {}_G\{Fil \rightarrow S\}$$

$${}_G\{Pes \rightarrow S\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ mg\vec{z} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_G$$

De la matrice de changement de base on tire :

$\vec{z} = -\sin\alpha\,\vec{x}_S + \cos\alpha\,\vec{z}_S$

D'où $mg\,\vec{z} = -mg\sin\alpha\ \vec{x}_S + mg\cos\alpha\ \vec{z}_S$

Le torseur s'écrit alors :

$$\{Pes \to S\} = \left\{\begin{array}{l|l} -mg\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ mg\cos\alpha & 0 \end{array}\right\}_{(G,\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)}$$

$$\{Fil \to S\} = {}_G\left\{\begin{array}{l|l} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -T\vec{z}_S & 0 \end{array}\right\} \text{ d'où } \quad \{\bar{S} \to S\} = \left\{\begin{array}{l|l} -mg\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ mg\cos\alpha - T & 0 \end{array}\right\}_{(G,\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)}$$

c) Torseur des efforts extérieurs en O

Si l'on veut analyser le mouvement du solide autour de l'axe $(O,\vec{y})$ il faut écrire le torseur des efforts extérieurs $\{\bar{S} \to S\}$ au point O

On applique la formule du champ des moments :

$$\vec{\mu}_{O\{\bar{S}\to S\}} = \vec{\mu}_{G\{\bar{S}\to S\}} + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{R} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -mg\sin\alpha \\ 0 \\ mg\cos\alpha - T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -mg\ell\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

Finalement le torseur des efforts extérieurs s'écrit :

$$\boxed{\{\bar{S} \to S\} = \left\{\begin{array}{l|l} -mg\sin\alpha & 0 \\ 0 & -mg\ell\sin\alpha \\ mg\cos\alpha - T & 0 \end{array}\right\}_{(O,\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)}}$$

d) Vitesse du point G

Taux de rotation : $\vec{\Omega}_{S/R} = \frac{d\alpha}{dt}\ \vec{y_s} = \dot{\alpha}\,\vec{y_s}$

$$\vec{V}_{G/R} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OG} = \frac{d}{dt} l\,\vec{z_s} = l\,\frac{d}{dt}\,\vec{z_s}$$

Avec $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{z_s}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{z_s}\right]_{Rs} + \overrightarrow{\Omega}_{Rs/R}\wedge \overrightarrow{z_s} = 0 + \dot{\alpha}\,\overrightarrow{y_s}\wedge \overrightarrow{z_s} = \dot{\alpha}\,\overrightarrow{x_s}$
Donc $\vec{V}_{G/R} = l\dot{\alpha}\,\overrightarrow{x_s}$

e) Accélération du point G

$$\vec{\gamma}_{G/R} = \frac{d}{dt}\vec{V}_{G/R} = \frac{d}{dt}l\dot{\alpha}\,\overrightarrow{x_s} = l\frac{d}{dt}\dot{\alpha}\,\overrightarrow{x_s} = l\,[\,\ddot{\alpha}\overrightarrow{x_s} + \dot{\alpha}\,\frac{d}{dt}\overrightarrow{x_s}\,]$$

$$\vec{\gamma}_{G/R} = l\;\ddot{\alpha}\,\overrightarrow{x_s} + l\,\dot{\alpha}^2\left(\overrightarrow{y_s}\wedge\overrightarrow{x_s}\right) = l\;\ddot{\alpha}\,\overrightarrow{x_s} - l\,\dot{\alpha}^2\overrightarrow{z_s}$$

La composante suivant $\overrightarrow{x_s}$ représente l'accélération tangentielle et la composante suivant $\overrightarrow{z_s}$ représente l'accélération normale.

f) Théorème de la résultante dynamique

$$\mathrm{m}\vec{\Gamma}_{G/R} = \vec{R}\{\overline{S} \to S\}$$
$$m(l\;\ddot{\alpha}\,\overrightarrow{x_s} - l\,\dot{\alpha}^2\overrightarrow{z_s}) = -m\,g\sin\alpha\,\overrightarrow{x_s} + (m\,g\cos\alpha - T)\overrightarrow{z_s}$$

$$\begin{Bmatrix} ml\ddot{\alpha} \\ 0 \\ -ml\dot{\alpha}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m\,g\sin\alpha \\ 0 \\ m\,g\cos\alpha - T \end{Bmatrix}$$

En projection sur $\vec{x}_S$: $\quad m\ell\ddot{\alpha} = -mg\sin\alpha$
Donc en simplifiant par m on obtient : $l\ddot{\alpha} + gsin\,\alpha = 0$
Finalement en divisant par l on obtient : $\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0$

Lorsque α est petit on a $\sin\alpha \sim \alpha$, on obtient donc :

$$\boxed{\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0} \qquad (1)$$

En projection sur $\vec{z}_S$: $\quad -ml\,\dot{\alpha}^2 = m\,g\cos\alpha - T$

$$\boxed{-ml\,\dot{\alpha}^2 - m\,g\cos\alpha + T = 0} \qquad (3)$$

g) Moment cinétique en O
Le théorème de Koenig permet d'écrire :$\vec{\sigma}_O S/R = \vec{\sigma}_G S/R + \overrightarrow{OG}\wedge m\,\vec{V}_{G/R}$
avec $\vec{\sigma}_G S/R = 0$ car il s'agit d'un point matériel et la matrice d'inertie [J_G] est nulle.

$$\vec{\sigma}_O S/R = l\,\overrightarrow{z_s}\wedge ml\dot{\alpha}\,\overrightarrow{x_s} = ml^2\dot{\alpha}\,\overrightarrow{y_s}$$

h) Moment dynamique en O

$\vec{\delta}_O S/R = \frac{d}{dt}\vec{\sigma}_O S/R + m\overrightarrow{V_{O/R}}\wedge\overrightarrow{V_{G/R}}$ le deuxième terme étant nul puisque O est fixe dans R

$\vec{\delta}_O S/R = \frac{d}{dt}\vec{\sigma}_O S/R = ml^2\ddot{\alpha}\,\overrightarrow{y_s}$ car $\overrightarrow{y_s}$ est fixe dans R

i) Théorème du moment dynamique

$$\vec{\mu}_O\{\bar{S} \rightarrow S\} = \vec{\delta}_O S/R$$
$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -mgl\sin\alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ ml^2\ddot{\alpha} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En projection sur $\vec{y}_S$ on obtient :

$$-m\ g\ l\ sin\ \alpha = ml^2\ddot{\alpha}$$

soit en simplifiant par ml

$$l\ddot{\alpha} + gsin\ \alpha = 0$$

En divisant par l , on obtient finalement la même équation que celle trouvée par le théorème de la résultante :

$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} sin\ \alpha = 0$ ou pour α petit $\boxed{\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0}$

Cette équation lie l'accélération angulaire à la position du solide est une équation différentielle du second ordre du type $\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0$ avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ = pulsation propre du pendule

La solution de cette équation est :

$\alpha(t) = \alpha_0 \cos\omega t$ de période $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\sqrt{\ell}}{\sqrt{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

On voit que la masse m n'influence pas la période

$\boxed{\begin{cases} \ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0 \\ -m\ell\dot{\alpha}^2 = mg\cos\alpha - T \end{cases}}$ ces 2 équations représentent les équations de mouvement du pendule autour de O , $\vec{y}_S$

j) Energie cinétique du pendule

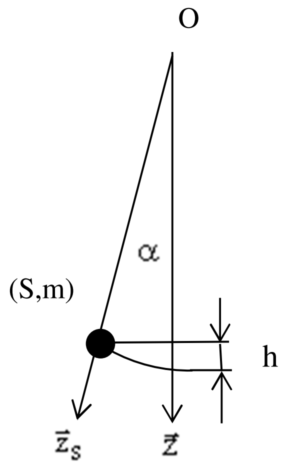
Le double de l'énergie cinétique est obtenu en faisant le comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique.

$$\boxed{\{\upsilon_{S/R}\} = \begin{Bmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \ell\dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \end{Bmatrix}_{(G,\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)}} \qquad \boxed{\{C_{S/R}\} = \begin{Bmatrix} \begin{vmatrix} m\ell\dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \end{Bmatrix}_{(G,\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)}} \quad \text{avec } \vec{\sigma}_{G(S/R)} = \vec{0}$$

$$2Ec = {}_G\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}_{G/R}\end{Bmatrix} . {}_G\begin{Bmatrix} m\vec{V}_{G/R} \\ \vec{\sigma}_{G(S/R)}\end{Bmatrix} = m\ell^2\dot{\alpha}^2$$

D'où $Ec = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\alpha}^2$

k) Energie potentielle



Ep = mgh puisque Ep = 0 quand α=0

Avec $h = \ell - \ell\cos\alpha$

$Ep = mg\ell(1 - \cos\alpha))$

l) Théorème de la conservation de l'énergie

Em = Ec + Ep = Cte

$Ec = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\alpha}^2$ et $Ep = mg\ell(1-\cos\alpha)$

$\frac{1}{2} m\ell^2\dot{\alpha}^2 + mg\ell(1-\cos\alpha) = Cte$

Aux conditions initiales si $\alpha = \alpha_0$ il n'y a pas de mouvement :

Alors $\dot{\alpha} = Ec = 0 \Rightarrow Cte = mg\ell(1-\cos\alpha_0)$

$Em = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\alpha}^2 + mg\ell(1-\cos\alpha) = mg\ell(1-\cos\alpha_0)$

Soit en simplifiant par $\frac{1}{2} m\ell^2$

$Em = \dot{\alpha}^2 + \frac{2g}{\ell}(1-\cos\alpha) = \frac{2g}{\ell}(1-\cos\alpha_0)$ avec $\omega^2 = \frac{g}{\ell}$

$\dot{\alpha}^2 + 2\omega^2(1-\cos\alpha) - 2\omega^2(1-\cos\alpha_0) = 0$

$\dot{\alpha}^2 + 2\omega^2(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) = 0$

On voit que $\dot{\alpha} = 0 \ lorsque \ \alpha = \alpha_0$

m) Puissance développée par les efforts extérieurs

$P\{\bar{S} \to S\} = \frac{d}{dt}Ec = \frac{1}{2}m\ell^2\left[\frac{d}{dt}\dot{\alpha}^2\right] = \frac{m\ell^2}{2}.2\dot{\alpha}.\ddot{\alpha} = m\ell^2\dot{\alpha}\,\ddot{\alpha}$

n) Evolution de l'énergie cinétique

$Ec = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\alpha}^2$

$\Rightarrow$ Ec = 0 $lorsque\ \dot{\alpha} = 0\ c'est - $à$ - dire\ quand\ \alpha = \alpha_0$ chose qui a été démontrée ci-dessus

Energie cinétique maximum :
Ep+Ec = Cte l'énergie cinétique sera maxi lorsque Ep = 0
$Ep = mgl(1 - cos\alpha) = 0$ quand $cos\alpha = 1 \;\; \Rightarrow \alpha = 0$

$Ec \; maxi \; quand \; \alpha = 0$
On peut vérifier sur l'animation

o) Application numérique

Période initiale

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\sqrt{\ell}}{\sqrt{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,1}{9,81}} = 0,634s$$

Longueur du balancier

$$T^2 = 4\pi^2\frac{\ell}{g} = 1 \quad d'où \qquad \ell = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 0,248m$$

Animation montrant l'évolution de la période du pendule :
Cliquer sur la masse et l'emmener à une amplitude initiale $0 \leq \alpha \leq 180°$
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/periode_pendule.php

Animation pour voir la tension T, les forces, l'accélération et la vitesse :
La vitesse et l'angle initial peuvent être modifiés
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/tension_pendule.php

Animation pour voir le mouvement du pendule :
λ représente le coefficient d'amortissement et les paramètres peuvent être modifiés
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/pend_pesant1.php

Animation pour voir l'accélération, la tension T, la période :
m, l, α_0 peuvent être modifiés
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/pend_pesant_FJ.php

Annexe :

Synoptique d'une étude en dynamique du solide
Application du Principe Fondamental de la Dynamique

$$\vec{V}_{G(S/R)} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OG}\right]_R$$

Matrice d'inertie

$$[J_G] = \begin{bmatrix} I_{Gx} & -P_{Gxy} & -P_{Gxz} \\ -P_{Gxy} & I_{Gy} & -P_{Gyz} \\ -P_{Gxz} & -P_{Gyz} & I_{Gz} \end{bmatrix}$$

I_{Gx}, I_{Gy}, I_{Gz} = moment d'inertie

P_{Gij} = Produits d'inertie

Torseur cinétique

1) Résultante cinétique=quantité de mouvement= $m\vec{V}_{G(S/R)}$

2) Moment Cinétique (cas général)

$$\vec{\sigma}_{A(S/R)} = [J_A]\left[\vec{\Omega}_{S/R}\right] + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{V}_{A/R}$$

(Voir les différents cas particuliers permettant de simplifier l'écriture du moment cinétique)

Torseur cinétique

$$\{C_{S/R}\}_A = \begin{Bmatrix} m\vec{V}_{G(S/R)}.\vec{x} \\ m\vec{V}_{G(S/R)}.\vec{y} \\ m\vec{V}_{G(S/R)}.\vec{z} \\ \vec{\sigma}_{A(S/R)}.\vec{x} \\ \vec{\sigma}_{A(S/R)}.\vec{y} \\ \vec{\sigma}_{A(S/R)}.\vec{z} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\gamma}_{G(S/R)} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{G(S/R)}}\right]_R$$

$$\vec{\delta}_{A(S/R)} = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A(S/R)}\right]_R + m\vec{V}_{A/R} \wedge \vec{V}_{G/R}$$

Torseur dynamique

$$\{D_{S/R}\} = \begin{Bmatrix} m\vec{\gamma}_{G(S/R)}.\vec{x} \\ m\vec{\gamma}_{G(S/R)}.\vec{y} \\ m\vec{\gamma}_{G(S/R)}.\vec{z} \\ \vec{\delta}_{A(S/R)}.\vec{x} \\ \vec{\delta}_{A(S/R)}.\vec{y} \\ \vec{\delta}_{A(S/R)}.\vec{z} \end{Bmatrix}_A$$

PFD

$$\{D_{S/R}\} = \{\bar{S} \rightarrow S\}$$

Torseur des efforts extérieurs

$$\{\bar{S} \rightarrow S\} = \begin{Bmatrix} \sum \vec{F}_{ext\rightarrow S}.\vec{x} \\ \sum \vec{F}_{ext\rightarrow S}.\vec{y} \\ \sum \vec{F}_{ext\rightarrow S}.\vec{z} \\ \vec{\mu}_{A\,Fext}.\vec{x} \\ \vec{\mu}_{A\,Fext}.\vec{y} \\ \vec{\mu}_{A\,Fext}.\vec{z} \end{Bmatrix}_A$$