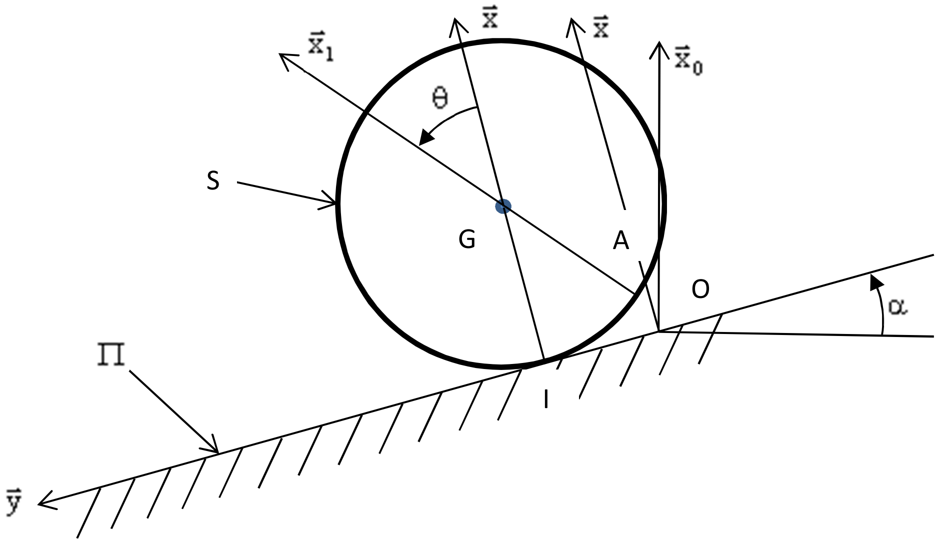
Etude d'un cylindre roulant sur un plan incliné



Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère galiléen lié au plan Π, l'axe $(O,\vec{y})$ étant dirigé suivant la ligne de plus grande pente. Le cylindre de révolution (S), homogène, de masse m, de rayon R, et de centre d'inertie G a pour axe de révolution $(G,\vec{z})$.

(S) est en contact avec le plan Π suivant l'axe $(I,\vec{z})$ et roule sans glisser sur ce plan tel que $\overrightarrow{IG} = R.\vec{x}$. On appelle *f* le coefficient de frottement entre les 2 solides en contact.

$R_1(G,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})$ est un repère lié à (S). On pose $\theta = (\vec{x},\vec{x}_1)$.

L'angle d'inclinaison du plan incliné est $\alpha = (\vec{x}_0,\vec{x})$ avec $0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$

On appelle $\vec{g} = -g.\vec{x}_0$ l'accélération de la pesanteur, $\vec{x}_0$ étant dirigé suivant la verticale ascendante.

α

1) Ecrire la forme générale de la matrice d'inertie en G du solide (S) dans R_1 sans en calculer les différents termes.
2) Ecrire la condition de roulement sans glissement
3) Ecrire le torseur des efforts extérieurs $\{\bar{S} \longrightarrow S\}$. Pour cela vous écrirez les torseurs $\{Pes \longrightarrow S\}$ et $\{\Pi \longrightarrow S\}$. Quels sont les points où les moments de ces deux torseurs sont nuls ? Quel point faut-il choisir pour qu'il n'y ait pas d'inconnues de liaison dans l'écriture du moment du torseur $\{\bar{S} \longrightarrow S\}$.
4) Ecrire en ce point le moment du torseur $\{\bar{S} \longrightarrow S\}$.
5) Déterminez le moment cinétique au point G de (S) dans son mouvement par rapport à R.
6) Déterminez le moment dynamique au point G de (S) dans son mouvement par rapport à R.

7) Déterminez le moment dynamique au point I de (S) dans son mouvement par rapport à R.
8) Appliquez le PFD en projetant sur $\vec{z}$ l'équation des moments. En déduire l'équation du mouvement de (S) par rapport au plan Π de la forme $\ddot{\theta} = f(\alpha, g, R)$.
9) Soit y l'abscisse du centre d'inertie G de (S) sur l'axe $(O, \vec{y})$. On suppose que y=0 lorsque θ=0. Exprimez l'équation du mouvement de (S) par rapport au plan Π en fonction de y'' de la forme $y'' = f(g, \alpha)$.
10) Sachant qu'à la date t=0, y(0)=0 et y'(0)=0, déterminez à tout instant, le paramètre y(t) définissant la position du centre d'inertie G de (S) dans R.
11) Déterminez la valeur maximale de l'angle α pour (S) roule sans glisser sur le plan Π.
    On suppose que la résultante $\vec{R}\{\Pi \longrightarrow S\} = X.\vec{x} + Y.\vec{y}$
    Ecrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$ et en déduire les inconnues de liaison X et Y. La condition de roulement sans glissement s'écrivant $|Y| \leq f|X|$, en déduire la relation liant α et f.