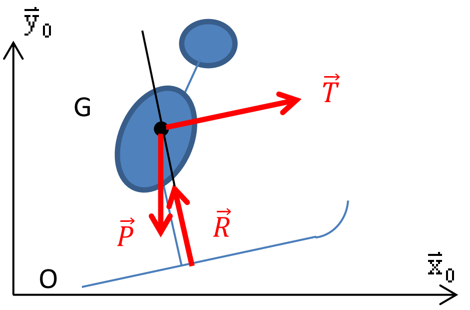
Corrigé Contrôle de Mécanique
du 19/06/2014

Tous documents autorisés - Durée 1h30 mn
Téléphone portable interdit
Sujet à rendre avec la copie

But : Calculer le moteur d'un remonte-pente à fil
Un skieur et son équipement de masse totale m utilise un remonte pente à fil pour rejoindre le haut de la piste qui fait un angle α avec l'horizontale.
Données : m = 80 kg , α = 10° , g = 9,81 m.s^{-2}

1) On suppose le remonte-pente à l'arrêt

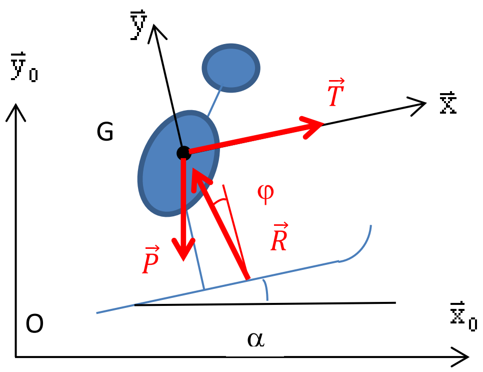


Mettre en place sur le dessin ci-contre les 3 forces supposées concourantes en G auxquelles est soumis le skieur.
On appellera $\vec{R}$ la réaction du sol, $\vec{T}$.la tension exercée par le fil et $\vec{P}$ le poids du skieur et de son matériel.
Ecrire l'équation vectorielle traduisant le principe fondamental de la statique.

$$\boxed{\vec{R} + \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}}$$

On isole le skieur qui est à l'équilibre.

2) Lors de la mise en marche du remonte-pente, le frottement entre le ski et la neige intervient.



Mettre en place sur le dessin ci-contre les 3 forces $\vec{R}$, $\vec{T}$ et $\vec{P}$,supposées concourantes en G auxquelles est soumis le skieur. Faites apparaître sur le dessin l'angle de frottement φ.
Ecrire le principe fondamental de la statique en projetant les 3 forces sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$

La réaction du sol $\vec{R}$ s'incline de l'angle φ et s'oppose au mouvement.

Le coefficient de frottement vaut :
$\mu = \text{tg}\,\varphi = 0{,}05$

(1) Projection sur $\vec{x}$: $\sum \vec{F}_{ext}.\vec{x} = -m\ g\ \sin\alpha - R\sin\varphi + T = 0$

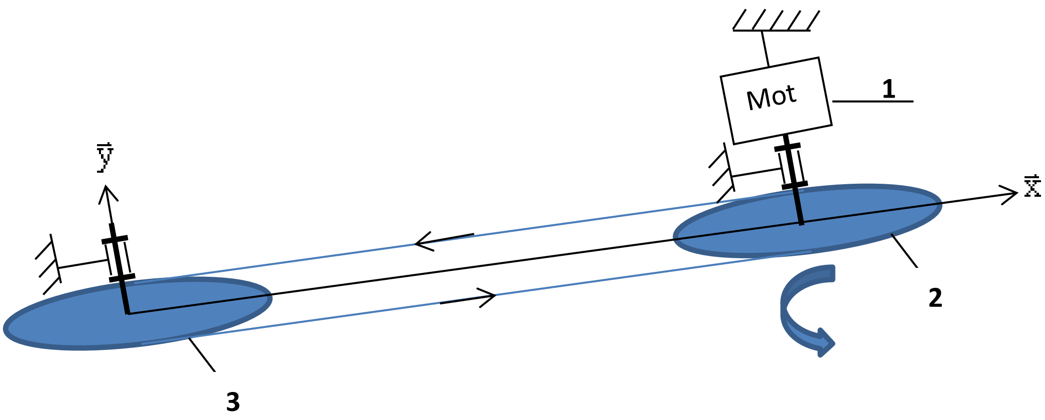
(2) Projection sur $\vec{y}$: $\sum \vec{F}_{ext}.\vec{y} = -m\ g\ \cos\alpha + R\cos\varphi = 0$

Calculez à partir des équations (1) et (2) l'intensité de la réaction du sol $\|\vec{R}\|$ et de la tension $\|\vec{T}\|$ exercée par le fil sur le bras du skieur en fonction de m , g , α et φ.

A partir de l'équation (2) on calcule $R = \frac{mg\cos\alpha}{\cos\varphi} = \frac{80 \times 9{,}81 \times \cos 10}{\cos(\text{Arctg}\,0{,}05)} = 773{,}84\ \text{N}$

En remplaçant dans (1) on obtient $T = mg\sin\alpha + R\sin\varphi = 174{,}92\ \text{N}$

3) Le remonte-pente est composé d'un groupe moto-réducteur noté **1** , d'une poulie amont et de son arbre noté 2 , d'une poulie aval et de son arbre noté 3 , d'un brin de fil montant et d'un brin de fil descendant de masses négligeables.



Sachant que la vitesse du fil V = 0,6 m.s^{-1} et que le rayon des poulies r = 0,45 m , calculez la vitesse angulaire des poulies.

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega = \frac{V}{r} = \frac{0{,}6}{0{,}45} = 1{,}33\ \text{rad/s}$$

On assimile chaque poulie à un cylindre plein en tôle d'acier (ρ = 7800 kg.m^{-3}) de hauteur 2 mm. Calculez la masse de chaque poulie :

$$m = \rho.v = \rho\pi r^2 h = 7800.\pi.0{,}45^2.2.10^{-3} = 9{,}924\ \text{kg}$$

Calculez le moment d'inertie d'une poulie par rapport à son axe de rotation.

$$I_{G3y} = I_{G2y} = \frac{mr^2}{2} = \frac{9{,}924 \times 0{,}45^2}{2} = 1{,}005\ \text{kg.m}^2$$

4) On suppose que le fil tracte au maximum 20 skieurs de masses identiques.
Calculez l'énergie cinétique de translation $E_{C(20SK)}$ nécessaire au tractage des 20 skieurs.

$$Ec_{(20sk)} = 20 \times \frac{1}{2} mv^2 = 10 \times 80 \times 0{,}6^2 = 288\ \text{J}$$

Calculez l'énergie cinétique de rotation de chaque ensemble poulie+arbre $E_{C(2)}$ et $E_{C(3)}$. Le moment d'inertie de chaque arbre supportant les poulies vaut 8.10^{-3} kg.m²

$$Ec_{(2)} = Ec_{(3)} = \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2}(1{,}005 + 0{,}008)\,x\,1{,}33^2 = 0{,}896\ J$$

On s'intéresse au système S suivant :

S = Poulie motrice 2 + Poulie réceptrice 3 + 20 skieurs (20sk) + fil

Calculez l'énergie cinétique globale $E_{C(S)}$ de ce système.

$$Ec_{(S)} = Ec_{(20sk)} + Ec_{(2)} + Ec_{(3)} = 289{,}79\ J$$

5) Inventaire des actions extérieures au système S

$$\{\bar{S} \rightarrow S\} = \{1 \rightarrow 2\} + \{Sol \rightarrow 2\} + \{Sol \rightarrow 3\} + \{Sol \rightarrow 20SK\} + \{Pes \rightarrow 20SK\}$$

Les torseurs $\{Sol \rightarrow 2\}$ et $\{Sol \rightarrow 3\}$ ne génèrent aucune puissance car ces liaisons sont supposées sans frottement. On peut donc écrire la relation qui donnera la puissance galiléenne développée par les actions extérieures au système S:

Le moteur applique à l'arbre 2 un couple coté $Cm.\vec{y}$. La vitesse angulaire des arbres 2 et 3 est $\omega.\vec{y}$

$$Pg\{\bar{S} \rightarrow S\} = Pg\{1 \rightarrow 2\} + Pg\{Sol \rightarrow 20SK\} + Pg\{Pes \rightarrow 20SK\}$$

$$Pg\{1 \rightarrow 2\} = \{1 \rightarrow 2\} \otimes \upsilon\{2/1\}$$

$$\{1 \rightarrow 2\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \quad 0 \\ \quad Cm \\ \quad 0 \end{array} \right\}_{(G2,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \{\upsilon_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \quad 0 \\ \quad \omega \\ \quad 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_{(G2,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Complétez le torseur des efforts extérieurs et le torseur cinématique ci-dessus et en déduire ci-dessous la puissance galiléenne.

d'où $Pg\{1 \rightarrow 2\} = Cm.\omega$

A partir du bilan des forces extérieures au skieur de la question 2) calculez la puissance galiléenne exercée par le sol sur les 20 skieurs soit $Pg\{Sol \rightarrow 20sk\}$. On rappelle que P = F.V

$$\{Sol \rightarrow 20sk\} = \left\{ \begin{array}{l} -20R\sin\varphi \\ 20R\cos\varphi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ N \end{array} \right\}_{(Gsk,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \{\upsilon_{20SK/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_{(Gsk,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Le terme N ci-dessus n'interviendra pas dans la puissance

D'où $Pg\{Sol \rightarrow 20sk\} = -20.R\sin\varphi.V$

A partir du bilan des forces extérieures au skieur de la question 2) calculez la puissance galiléenne exercée par la pesanteur sur les 20 skieurs soit $Pg\{Pes \rightarrow 20sk\}$

$$\{Pes \rightarrow 20sk\} = \left\{\begin{array}{|c} -20mg\sin\alpha \\ -20mg\cos\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}_{(Gsk,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \{\upsilon_{20SK/0}\} = \left\{\begin{array}{|c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}_{(Gsk,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

D'où $Pg\{Pes \rightarrow 20sk\} = -20mg\sin\alpha.V$

Calculez la puissance galiléenne totale :

$$Pg\{\overline{S} \rightarrow S\} = Pg\{1 \rightarrow 2\} + Pg\{Sol \rightarrow 20SK\} + Pg\{Pes \rightarrow 20SK\}$$

$$Pg\{\overline{S} \rightarrow S\} = Cm.\omega - 20.R\sin\varphi.V - 20mg\sin\alpha.V$$

Sachant que $V = \omega\, r$

$$Pg\{\overline{S} \rightarrow S\} = \omega(Cm - 20.R\sin\varphi.r - 20mg\sin\alpha.r)$$

6) On applique le théorème de l'énergie-puissance $\frac{d}{dt}Ec_{(S/R)} = Pg\{\overline{S} \rightarrow S\}$

$$Ec_{(S)} = Ec_{(20sk)} + Ec_{(2)} + Ec_{(3)} = 20 \text{ x } \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_2\omega^2 + \frac{1}{2}J_3\omega^2$$

Sachant que $V = \omega\, r$

$$Ec_{(S)} = 20 \text{ x } \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \frac{1}{2}J_2\omega^2 + \frac{1}{2}J_3\omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2(20mr^2 + J_2 + J_3)$$

$$\frac{d}{dt}Ec_{(S/R)} = \omega.\dot{\omega}(20mr^2 + J_2 + J_3)$$

Appliquons le théorème :

$$\omega.\dot{\omega}(20mr^2 + J_2 + J_3) = \omega(Cm - 20.R\sin\varphi.r - 20mg\sin\alpha.r)$$

A vitesse constante on a $\dot{\omega}$=0 donc $Cm = 20.R\sin\varphi.r + 20mg\sin\alpha.r$

A.N. $Cm = 20 \text{ x } 773{,}84\sin 2{,}862 \text{x} 0{,}45 + 1600 \text{x} 9{,}81\sin 10 \text{x} 0{,}45 = 1574 \text{ mN}$

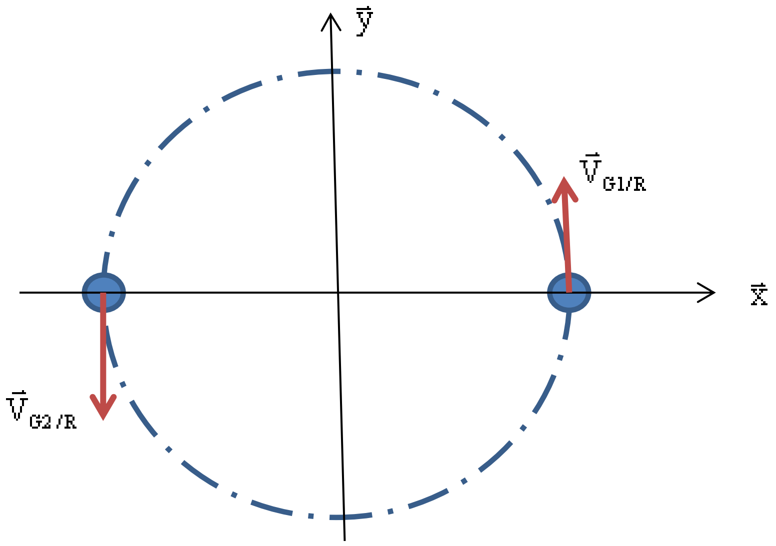
D'où la puissance motrice à appliquer à l'arbre 2:

$P = Cm\,.\,\omega = 1574 \text{ x } 1{,}33 = 2094$ W

EXERCICE 2 : L'EFFET PATINEUSE

a) A l'instant t0 :

Calcul du moment cinétique :



Les matrices d'inertie en G des masses ponctuelles sont nulles.

Pour la masse 1 :

$$\vec{V}_{G1/R} = \omega_0 . r_0 . \vec{y}$$

$$\vec{\sigma}_{O(M1/R)} = [J_G][\vec{\Omega}_{S/R}] + \overrightarrow{OG_1} \wedge m\vec{V}_{G1/R} = r_0 . \vec{x} \wedge m . r_0 . \omega_0 . \vec{y} = m . r_0{}^2 . \omega_0 . \vec{z}_0$$

Pour la masse 2 :

$$\vec{V}_{G2/R} = -\omega_0 . r_0 . \vec{y}$$

$$\vec{\sigma}_{O(M2/R)} = [J_G][\vec{\Omega}_{S/R}] + \overrightarrow{OG_2} \wedge m\vec{V}_{G2/R} = -r_0 . \vec{x} \wedge -m . r_0 . \omega_0 . \vec{y} = m . r_0{}^2 . \omega_0 . \vec{z}_0$$

Il en résulte :

$$\vec{\sigma}_{O(S/R)} = 2m . r_0{}^2 . \omega_0 . \vec{z}_0$$

Calcul de l'énergie cinétique :

Pour un solide en rotation $Ec = \frac{1}{2} J\omega^2$

Pour une masse ponctuelle $J_{Oz} = J_{Gz} + m.r_0^2 = m.r_0^2$ puisque $J_{Gz}=0$

Pour les 2 masses :

$$Ec_{0(S)} = 2.\frac{1}{2} m.r_0{}^2 \omega_0{}^2 = m.r_0{}^2 \omega_0{}^2$$

A l'instant t1 :

Moment cinétique et énergie cinétique :

Par analogie $\vec{\sigma}_{O(S/R)} = 2m.r_1{}^2 . \omega_1 . \vec{z}_0$ et $Ec_{1(S)} = 2.\frac{1}{2} m.r_1{}^2 \omega_1{}^2 = m.r_1{}^2 \omega_1{}^2$

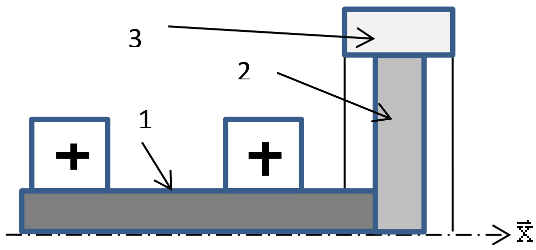
La référence de hauteur étant l'axe $(O, \vec{x})$, les masses restant à la même hauteur, l'énergie potentielle Ep est nulle aux instants t_0 et t_1 . Il n'y a donc pas de variation de Ep.

Energie mécanique = Energie cinétique + 0
Entre t0 et t1 l'énergie mécanique reste constante .
On peut alors écrire que $Ec_{0(S)} = Ec_{1(S)}$

Soit : $m.r_0^2\omega_0^2 = m.r_1^2\omega_1^2$ d'où $\frac{r_0^2}{r_1^2}\omega_0^2 = \omega_1^2$ d'où $\omega_1 = \frac{r_0}{r_1}\omega_0$

Si $r_0 = 2r_1$ alors $\omega_1 = 2.\omega_0$

EXERCICE 3 – CALCUL d'UN COUPLE DE FROTTEMENT



Arbre 1

$$I_{Ox}(1) = \frac{m_1 r_1^2}{2} \text{ avec } m_1 = \rho\pi r_1^2.\ell_1 = 7800.\pi.0{,}03^2.0{,}4 = 8{,}822\text{kg}$$

On obtient m1 =

$$I_{Ox}(1) = \frac{8{,}822.0{,}03^2}{2} = 3{,}97.10^{-3}\,\text{m}^2.\text{kg}$$

Arbre 2

$$I_{Ox}(2) = \frac{m_2 r_2^2}{2} \text{ avec } m_2 = \rho\pi r_2^2.\ell_2 = 7800.\pi.0{,}1^2.0{,}02 = 4{,}901\text{kg}$$

$$I_{Ox}(2) = \frac{4{,}901.0{,}1^2}{2} = 24{,}504.10^{-3}\,\text{m}^2.\text{kg}$$

Tube 3

$$I_{Ox}(3) = \frac{m_3(r_2^2 + R^2)}{2} \text{ avec } m_3 = \rho\pi(R^2 - r_2^2).\ell_3 = 7800.\pi.(0{,}14^2 - 0{,}1^2).0{,}05 = 11{,}762\text{kg}$$

$$I_{Ox}(3) = \frac{11{,}762(0{,}1^2 + 0{,}14^2)}{2} = 174{,}079.10^{-3}\,\text{m}^2.\text{kg}$$

Ensemble S :

$$I_{Ox}(S) = 202{,}553.10^{-3}\,\text{m}^2.\text{kg}$$

Calcul de la décélération : Sachant que $\omega = \dot{\omega}\, t + \omega_0$ avec $\omega_0 = \frac{\pi.3000}{30} = 100.\pi\,\text{rad/s}$

A l'instant t = t₁ = 180 s , nous avons $\omega = 0$: $\dot{\omega} = -\frac{\omega_0}{t} = \frac{100.\pi}{180} = -1{,}745\,\text{rad/s}^2$

Nous avons : $I_{Ox}.\dot{\omega} = C_m - C_r$ avec le couple résistant =Cr = Couple de frottement et Cm =0

$-202{,}553.10^{-3}.1{,}745 = -Cf$ donc $Cf = 0{,}353\,\text{mN}$