Contrôle de Mécanique du 15/06/2016

Tous documents autorisés - Durée 1h30 mn
Téléphone portable interdit
Sujet à rendre avec la copie

QUESTIONS à CHOIX MULTIPLES : Répondre ci-dessous en mettant une croix dans le carré de la réponse considérée bonne

Exercice 1 (4)

Une voiture accélère d'une position initiale de x=100m avec une accélération de 5m/s². Quel est le temps nécessaire pour qu'elle revienne en $x = 0$?

☐(A) 4,47 s ☒ (B) 6,32 s ☐ (C) 5,32m/s ☐ (D) 6,12m

Exercice 2 (5)

Qu'advient-il de la distance de décélération d'une voiture si sa vitesse triple ?

☐ (A) triple ☐ (B) moitié ☐ (C) x6 ☒ (D) x9

Exercice 3 (6)

Sur une distance identique, qu'advient-il de la vitesse finale d'une voiture qui accélère si son accélération double ? La vitesse initiale est nulle.

☐ (A) x2 ☒ (B) $\times\sqrt{2}$ ☐(C) ÷2 ☐ (D) $\div\sqrt{2}$

Exercice 4 (19)

Dans l'espace loin de la Terre, où la force de gravité est négligeable, on considère une station spatiale circulaire de 50m de diamètre. Combien de tours doit-elle faire par seconde afin que les astronautes résidents perçoivent une gravité terrestre ?

☐ (A) 0,31/s ☒ (B) 0,1 s^{-1} ☐ (C) 0,5 s^{-1} ☐ (D) 0,81/s

Exercice 5 (21)

Un homme de 80 kg se trouve posé sur une balance dans un ascenseur lorsque celui-ci commence à accélérer vers le haut avec $a = 9{,}81 m/s^2$. La balance affiche alors 160 kg. Identifier les propositions correctes.

☐ (A) L'homme gagne effectivement un redoublement de masse.
☒ (B) La balance est fautive, c'est le poids non pas la masse qui double.
☐ (C) L'accélération de l'ascenseur vers le haut diminue la gravité effective que l'homme ressent.
☐ (D) Si l'ascenseur chutait avec $a = 9{,}81 m/s^2$ alors la balance afficherait 40 kg.

Exercice 6

On lâche une bille dans une parabole dont on pose le creux sur le zéro d'un axe x. Ainsi, l'équation de la parabole est $f(x) = 9x^2$. On lâche la bille en un endroit $x = -5$m. Quelle est alors la vitesse maximale de la bille (au creux) ?

☐ (A) 21,93m/s ☐ (B) 32,12m/s ☐ (C) 18,12m/s ☒ (D) 66,44m/s

Exercice 7

On considère une roue fine de rayon R assimilée à une jante. Ainsi, on peut considérer qu'elle a une masse linéique ρ en kg/m constante. Si l'on double le rayon de la roue, qu'advient-il de son moment d'inertie ?

☐ (A) x2 ☐ (B) $\times\sqrt{2}$ ☒ (C) x8 ☐ (D) x4

1) $X = \frac{1}{2}\gamma t^2 \qquad t = \sqrt{\frac{2X}{\gamma}} = \sqrt{\frac{200}{5}} = \sqrt{40} = 6,32\,s$

2) $V = \gamma t \Rightarrow t = \frac{V}{\gamma}$

$$X_1 = \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{1}{2}\gamma \frac{V^2}{\gamma^2} = \frac{V^2}{2\gamma}$$

avec $3V \Rightarrow X_2 = \frac{(3V)^2}{2\gamma} = \frac{9V^2}{2\gamma} = 9X_1 \Rightarrow$ Distance $\times 9$

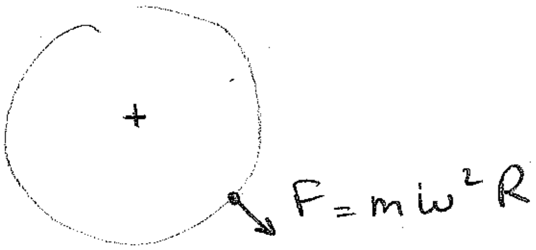
3) $V = \gamma t \Rightarrow t = \frac{V}{\gamma}$

$$X = \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{1}{2}\gamma \frac{V^2}{\gamma^2} = \frac{V^2}{2\gamma} \Rightarrow V_1 = \sqrt{2\gamma X}$$

En remplacant γ par 2γ on obtient $V_2 = \sqrt{2\,2\gamma X}$

$$= \sqrt{2}\,V_1$$

4)



La force centrifuge doit être égale au poids ressenti sur Terre soit mg

$$\cancel{m}\omega^2 R = \cancel{m}g \Rightarrow \underset{\text{en rad/s}}{\omega} = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

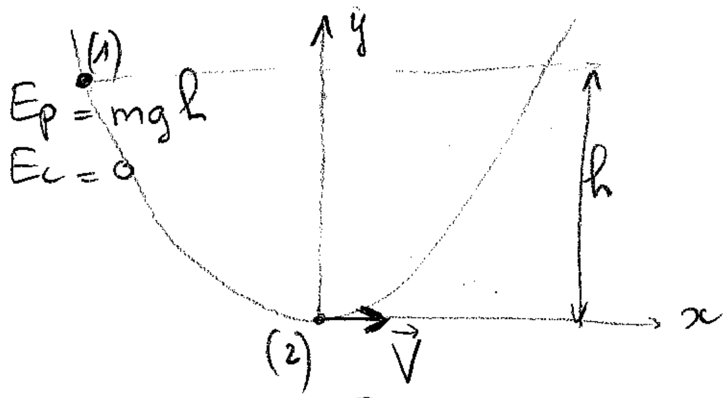
$$1t = 2\pi \text{ rad} \Rightarrow 1 \text{ rad} = \frac{1t}{2\pi}$$

Fréquence de rotation $= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}$ en tr/s

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9,81}{25}} = 0,1\ t/s$$

5) La masse reste identique $\forall$ l'endroit où l'on se trouve.
C'est le poids qui double.

6) L'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique



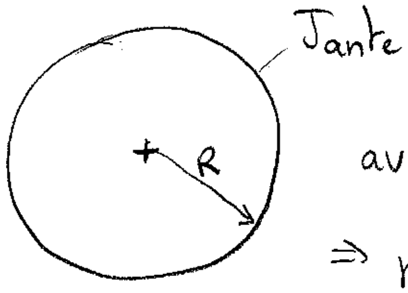
$E_p = 0$

$E_c = \frac{1}{2} m V^2$ avec $V = \sqrt{2gh}$

$h = f(-5) = 9 \times (-5)^2 = 225 \Rightarrow V = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 225}$

$V = 66{,}44$ m/s

7)



$I = m R^2$

avec $m = \rho \ell$ et $\ell = 2\pi R$

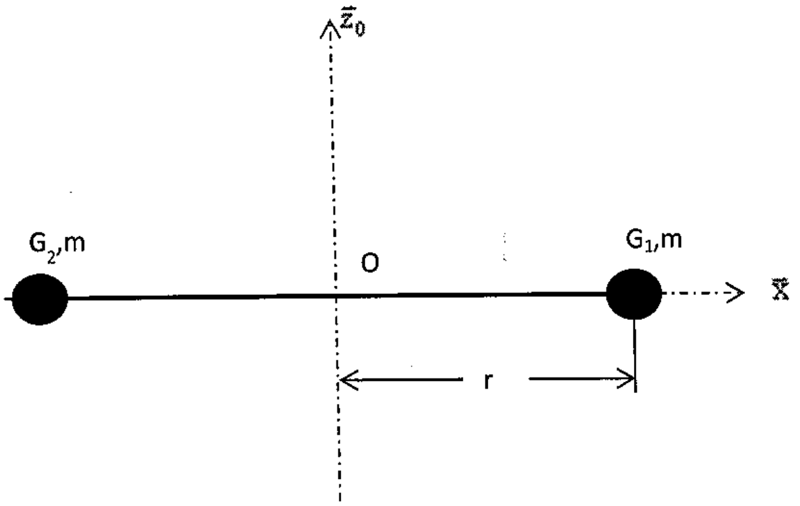
$\Rightarrow m = \rho 2\pi R$

$\Rightarrow I = \rho 2\pi R \times R^2 = 2\pi \rho R^3$

Si on remplace R par 2R

on obtient $8I$ (2^3) $\Rightarrow$ Rép. C

EXERCICE 2 : L'EFFET PATINEUSE



On cherche à comprendre le mécanisme par lequel une patineuse augmente sa vitesse angulaire en resserrant les bras près du corps. On considère le système modèle S, constitué de deux masses **ponctuelles** m, liées en O par deux bras de masses négligeables, de longueur variable r à un cylindre d'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$. On néglige la masse du cylindre central et des bras devant m.

a) Le système tourne initialement à vitesse angulaire ω_0 autour de $(O,\overrightarrow{z_0})$, les deux masses étant à une distance initiale $r=r_0$ du cylindre. Calculer le moment cinétique de la 1ère masse (G_1,m) par rapport à l'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$. Pour cela on appliquera $\vec{\sigma}_{O(M1/R)} = [J_G]\left[\vec{\Omega}_{S/R}\right] + \overrightarrow{OG_1} \wedge m\vec{V}_{G1/R}$. Tous les termes de la matrice d'inertie en G sont nuls car il s'agit de masses ponctuelles. Faire de même pour la 2ème masse (G_2,m) puis écrire le moment cinétique des 2 masses $\vec{\sigma}_{O(S/R)}$ et calculez et l'énergie cinétique Ec_0 du système S en fonction de m, r_0 et ω_0.

On rappelle que $2.Ec_{(S/R)} = {}_O\{\mathcal{V}_{S/R}\} \otimes {}_O\{C_{S/R}\}$.

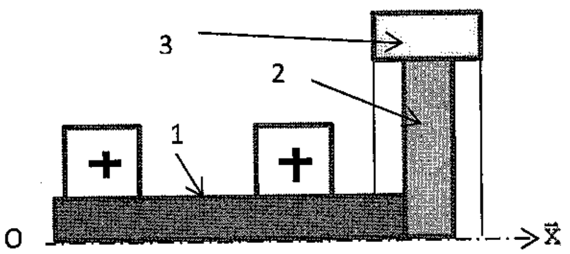
b) La patineuse ramène ses bras vers son corps , amenant les masses m à une distance $r_1 < r_0$, les masses restant sur l'axe $(O,\vec{x})$. Calculer le moment cinétique par rapport à l'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$ et l'énergie cinétique Ec_1 du système en fonction de m , r_1 et ω_1 .

La référence de hauteur étant l'axe $(O,\vec{x})$, que peut-on dire de l'énergie de l'énergie potentielle Ep entre les instants t_0 et t_1 ? Que vaut l'énergie mécanique ?

Comme il y a conservation de l'énergie mécanique entre les instants t_0 et t_1 , décrire ce qui se passe et calculer la nouvelle vitesse angulaire ω_1 en fonction de ω_0 , r_0 et r_1 (on donne $r_0=2.r_1$). Quel est le rapport $\frac{\omega_1}{\omega_0}$.

EXERCICE 3 – CALCUL d'UN COUPLE DE FROTTEMENT

On cherche à évaluer le couple de frottement généré par 2 roulements sur un arbre tournant autour de l'axe $(O,\vec{x})$.



Pour cela on monte au bout de l'arbre **1**, de masse m_1 de longueur ℓ_1 de rayon r_1, un volant d'inertie composé d'un arbre **2** de masse m_2 , de longueur ℓ_2 , de rayon r_2 et d'un tube **3** , de rayon intérieur r_2, de rayon extérieur R et de longueur ℓ_3.

Donnez l'expression littérale du moment d'inertie de l'arbre 1 par rapport à l'axe $(O,\vec{x})$

Donnez l'expression littérale du moment d'inertie de l'arbre 2 par rapport à l'axe $(O,\vec{x})$

Donnez l'expression littérale du moment d'inertie du tube 3 par rapport à l'axe $(O,\vec{x})$ puis calculez m_1 , m_2 , m_3 et $I_{Ox}(S) = I_{Ox}(1) + I_{Ox}(2) + I_{Ox}(3)$

On lance l'arbre à 2980t / mn à l'aide d'un moteur. A l'instant t_0 on coupe l'alimentation du moteur et on le désaccouple de l'ensemble étudié qui va progressivement chuter en vitesse avec une décélération constante jusqu'à atteindre une vitesse angulaire nulle à l'instant t_1.

Application numérique :
$r_1 = 30$ mm , $\ell_1 = 400$, $r_2 = 100$, $\ell_2 = 20$
R = 140, $\ell_3 = 50$, $t_0 = 0$, $t_1 = 3$ mn, $\rho = 7800 kg.m^{-3}$

A partir des équations de la cinématique calculez la décélération $\dot{\omega}$ pour un mouvement circulaire uniformément varié. En appliquant le théorème de l'énergie-puissance (voir exercice perceuse) calculez le couple résistant de frottement Cf.

EXO 2

$$\vec{\sigma}_0\, M_{1/R} = \vec{OG_1} \wedge m\vec{V}_{G_1/R}$$
$$= r_0\vec{x} \wedge m\,\omega_0\, r_0\,\vec{y} = m\,\omega_0\, r_0^2\,\vec{z}_0$$

$$\vec{\sigma}_0\, M_{2/R} = \vec{OG_2} \wedge m\vec{V}_{G_2/R}$$
$$= -r_0\vec{x} \wedge -m\,\omega_0\, r_0\,\vec{y} = m\,\omega_0\, r_0^2\,\vec{z}_0$$

$$\vec{\sigma}_0\, S/R = 2m\,\omega_0\, r_0^2\,\vec{z}$$

$$2\,Ec_0^{S/R} = {}_0\left\{\mathcal{V}_{S/R}\right\} \otimes {}_0\left\{\mathcal{C}_{S/R}\right\} = {}_0\left\{\begin{matrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{vmatrix} \\ \vec{V}_{G_{S/R}} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \end{matrix}\right\} \otimes {}_0\left\{\begin{matrix} m\vec{V}_{G_{S/R}} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2m\,\omega_0\, r_0^2 \end{vmatrix} \end{matrix}\right\}$$

$$Ec_0(S/R) = m\,\omega_0^2\, r_0^2$$

$$\vec{\sigma}_1(S/R) = 2m\,\omega_1\, r_1^2\,\vec{z} \Rightarrow Ec_1(S/R) = m\,\omega_1^2\, r_1^2$$

Ep ne change pas $\Rightarrow$ $Ec_0 = Ec_1$

$$\cancel{m}\,\omega_0^2\, r_0^2 = \cancel{m}\,\omega_1^2\, r_1^2$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2\,\frac{r_0^2}{r_1^2}$$

$$\omega_1 = \omega_0\,\frac{r_0}{r_1}$$

si $r_0 = 2r_1 \Rightarrow \omega_1 = \omega_0\,\frac{2\cancel{r_1}}{\cancel{r_1}}$

$$\omega_1 = 2\,\omega_0$$

$\Rightarrow$ Rapport $\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_0} = 2}$

Exo 3

$$I_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2} \quad \text{avec } m_1 = \rho \pi r_1^2 l_1$$

$$I_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2} \quad \text{avec } m_2 = \rho \pi r_2^2 l_2$$

$$I_3 = m_3 \left(\frac{r_2^2 + R^2}{2}\right) = \quad \text{avec } m_3 = \rho \pi (R^2 - r_2^2) l_3$$

$m_1 = 7800 \pi \, 0{,}03^2 \times 0{,}4 = 8{,}82 \text{ kg}$ (R0) $\quad 0{,}5 \times 3$

$m_2 = 7800 \pi \, 0{,}1^2 \times 0{,}02 = 4{,}9 \text{ kg}$ (R1)

$m_3 = 7800 \pi \left(0{,}14^2 - 0{,}1^2\right) 0{,}05 = 11{,}76 \text{ kg}$ (R2)

$I_1 = \frac{8{,}82 \times 0{,}03^2}{2} = 3{,}97 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{kg}$ R3

$I_2 = \frac{4{,}9 \times 0{,}1^2}{2} = 24{,}5 \; 10^{-3} \text{ m}^2 \text{kg}$ R4 $\quad 0{,}5 \times 3$

$I_3 = 11{,}76 \left(\frac{0{,}14^2 + 0{,}1^2}{2}\right) = 174{,}08 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{kg}$ R5

$I_{ox(s)} = 202 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{kg}$ /1

Temps mis pour décélérer $t = 3 \text{min} = 180 \text{ s}$

$I_{ox(s)} \, \omega' = C_m - C_f \qquad \omega' = C^{te}$

$\omega = \omega' t + \omega_0$

à $t = 180 \text{ s}$ $\omega = 0$ $\Rightarrow 0 = \omega' \times 180 + \frac{\pi \times 2980}{30}$

$\Rightarrow \omega' = -\frac{\pi \times 2980}{30 \times 180} = -1{,}73 \text{ rad s}^{-2}$ /1

avec $C_m = 0$

$C_f = -I_{ox(s)} \cdot \omega' = 202 \cdot 10^{-3} \times 1{,}73 = 0{,}35 \text{ m N}$

/1