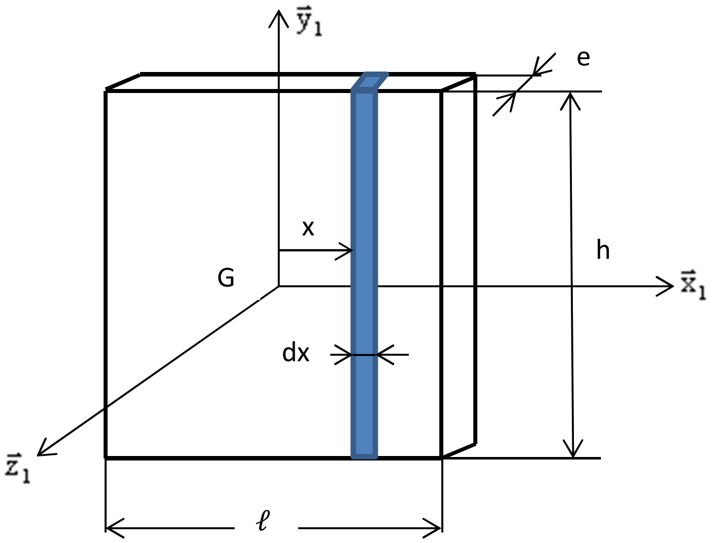
Contrôle de Mécanique
du 05/06/2014

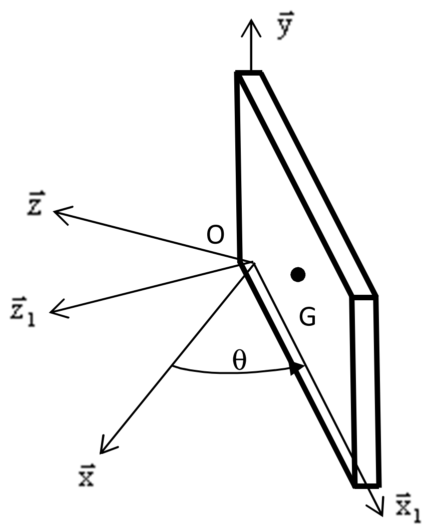
Tous documents autorisés - Durée 1h30 mn
Sujet à rendre avec la copie



Soit une porte assimilée à un parallélépipède de dimension ℓ x h x e

1) Exprimez la masse m du parallélépipède en fonction de la masse volumique ρ et des dimensions ℓ, h et e.
2) On désire calculer I_{y1Gz1}
   a. Donnez l'expression de l'élément de masse dm représenté sur le dessin ci-dessus
   b. Calculez I_{y1Gz1} en appliquant la définition $I = \iiint_S r^2 dm$. Exprimez I_{y1Gz1} = f (masse m)
   c. En déduire par analogie sans calculs I_{x1Gy1}
   d. Calculez I_{Gy1}
3) La porte tourne en réalité autour de l'axe $(O,\vec{y})$

   On pose $\theta = (\vec{x},\vec{x1})$ = angle de situation de la porte par rapport au repère galiléen $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$



Le plan x_1Oy est plan de symétrie de la porte

a. Définir le vecteur $\overrightarrow{OG}$ en fonction de ℓ , h et e dans la base mobile $R1(O,\vec{x1},\vec{y},\vec{z1})$

b. Ecrire le vecteur vitesse du point G , $\vec{V}_{G/R}$ en écrivant la formule du champ des moments en passant par le point fixe O

On donne $\vec{\Omega}_{S/R} = \dot{\theta}.\vec{y}$ avec $\vec{y} = \vec{y}_1$

c. En appliquant le théorème d'Huyghens calculez I_{Oy}

d. Application numérique avec ℓ=830mm, h=2030 , e=10 , ρ=7800 kg/m³

Calculez m , I_{Gy} et I_{Oy}

Corrigé

1) Masse $m = \rho l h e = \rho V$

2) a) Elément de masse $dm = \rho\, dV$
avec $dV = h.e.dx$

b) $I_{y_1 G z_1} = \int x^2\, dm = \int x^2 \rho h e\, dx = \rho h e \int x^2\, dx$

L'élément de masse devant décrire l'intégralité du volume, les bornes d'intégration sont $-\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}$

$$I_{y_1 G z_1} = \rho h e \int_{-\frac{l}{2}}^{l/2} x^2\, dx = \frac{\rho h e}{3}\left[x^3\right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}$$

$$= \frac{\rho h e}{3}\left[\frac{l^3}{8} - \left(-\frac{l^3}{8}\right)\right] = \frac{\rho h e\, l^3}{12} = \frac{m l^2}{12}$$

c) Par analogie $I_{x_1 G y_1} = \frac{m e^2}{12}$

d) Par combinaison $I_{G y_1} = I_{x_1 G y_1} + I_{y_1 G z_1} = \frac{m}{12}(l^2 + e^2)$

3) a) $\overrightarrow{OG} = \frac{l}{2}\vec{x_1} + \frac{h}{2}\vec{y}$

b) $\overrightarrow{V_{G/R}} = \cancel{\overrightarrow{V_{O/R}}} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \begin{vmatrix} -\frac{l}{2} \\ -\frac{h}{2} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{l}{2}\dot{\theta} \end{vmatrix}$

$$\overrightarrow{V_{G/R}} = -\frac{l}{2}\dot{\theta}\,\vec{z_1}$$

c) $I_{Oy} = I_{Gy} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m l^2}{12} + \frac{m e^2}{12} + \frac{m l^2 \times 3}{4 \times 3}$

$$I_{Oy} = \frac{m l^2}{3} + \frac{m e^2}{12}$$

d) Application numérique

$$m = \rho l h e = 7800 \times 0{,}83 \times 2{,}03 \times 10.10^{-3}$$

$$m = 131{,}42 \text{ kg}$$

$$I_{Gy} = \frac{m}{12}\left(l^2 + e^2\right) = \frac{131{,}42}{12}\left(0{,}83^2 + (10.10^{-3})^2\right)$$

$$= 7{,}546 \text{ kg.m}^2$$

$$I_{Oy} = \frac{m}{3}\left(l^2 + \frac{e^2}{4}\right) = \frac{131{,}42}{3}\left(0{,}83^2 + \frac{(10.10^{-3})^2}{4}\right)$$

$$= 30{,}18 \text{ kg.m}^2$$